فصل ۳

فضای هیلبرت

این فصل را به تعریف ضرب داخلی و فضای هیلبرت و عملگرها روی این فضا اختصاص می دهیم.

۱.۳ فضای ضرب داخلی و فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک **ضرب داخلی** روی X، تابعی است مانند $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ بطوریکه بازاء هر $a,b \in \mathbb{K}$ و هر $x,y,z \in X$ داشته باشیم:

(آ) $\langle ax+by, z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

(ب) $\langle x, ay+bz\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle + \overline{b}\langle x,z\rangle$

(پ) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

(ت) $\langle x,x\rangle \geq ۰$

(ث) $\langle x,x\rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$

$\langle x,y\rangle$ را ضرب داخلی x و y نامیم. تابع ضرب داخلی $\langle x,y\rangle$ نسبت به متغیر x خطی و نسبت به متغیر y خطی-مزدوج است، یعنی بازاء هر $x,y,z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{K}$ داریم:

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$$
$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$$

به فضای برداری X همراه با ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle$ یک **فضای ضرب داخلی** گوئیم و با $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ نشان می‌دهیم. اگر $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، نرم را می توان بصورت $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ روی آن تعریف کرد، که آن را **نرم تولید شده توسط ضرب داخلی** نامیم. بنابراین فضای ضرب داخلی فضائی نرمدار است و بعلاوه بازاء هر $x,y \in X$ داریم :

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad \text{(نامساوی شوارتز)}$$
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(نامساوی مثلثی)}$$
$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲) \qquad \text{(اتحاد متوازی الاضلاع)}$$

ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle$ یک تابع پیوسته روی $X\times X$ تعریف می کند، زیرا اگر (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در X باشند که $x_n\to x\in X$ و $y_n\to y\in X$، آنگاه با استفاده از نامساوی شوارتز و نامساوی مثلثی و اینکه دنبالهٔ $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ کراندار می باشد، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_n,y\rangle+\langle x_n,y\rangle-\langle x,y\rangle|\\ &= |\langle x_n,y_n-y\rangle|+|\langle x_n-x,y\rangle|\\ &\le \|x_n\|\,\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\,\|y\|\end{aligned}$$

و پیوستگی ضرب داخلی از آن نتیجه می شود.

تعریف ۲.۱.۳. یک فضای ضرب داخلی X را یک **فضای هیلبرت** نامیم، هرگاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، باناخ (کامل) باشد. یک فضای هیلبرت را با H یا $\mathcal{H}$ نشان خواهیم داد.

مثال ۳.۱.۳. $\mathbb{R}^n$ با نرم تعریف شدهٔ مثال ۲.۴.۲ یک فضای هیلبرت است. $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی

$$\langle x,y\rangle = x_1\bar{y_1}+\cdots+x_n\bar{y_n}$$

که در آن $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{C}^n$ یک فضای ضرب داخلی و با نرم

$$\|x\|=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2}$$

که بوسیلهٔ ضرب داخلی تولید شده یک فضای نرمدار باناخ و در نتیجه هیلبرت می باشد. همچنین فضای دنباله ℓ^2 که فضای متشکل از تمام دنباله‌های $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ از اسکالرها که برای آنها $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$ با نرم $\|x\|=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2)^{1/2}$ یک فضای باناخ و در نتیجه هیلبرت است. ℓ^2 را **فضای دنباله هیلبرت** گوئیم. تذکر اینکه هرچند فضای ضرب داخلی، فضائی نرمدار است ولی همهٔ فضاهای نرم دار، فضای ضرب داخلی نیستند. با این تعاریف به مفهوم تعامد می پردازیم که جهت بحث ما را تعیین می کند.

تعریف ۴.۱.۳. عناصر x و y از یک فضای حاصلضرب داخلی X را متعامد گوئیم اگر $\langle x,y\rangle=0$ و در این حالت می نویسیم $x\perp y$. مسلماً $x\perp y$ و $y\perp x$ معادلند. برای مجموعه های $A,B\subseteq X$، می نویسیم $x\perp A$ اگر برای هر a ی متعلق به A، $x\perp a$. همینطور می نویسیم $A\perp B$ اگر برای هر a در A و هر b در B داشته باشیم $a\perp b$. در فضای هیلبرت H مجموعهٔ $S\subseteq H$ را **متعامد یکه** گوئیم، اگر نرم هر بردار S برابر واحد بوده و هر دو بردار مجزا در S متعامد باشند.

۲.۳ عملگر خطی

تعریف ۱.۲.۳. اگر X و Y فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشند، عملگرخطی T عبارتست از نگاشت $T:D(T)\subseteq X\to Y$ با دامنهٔ $D(T)$ بطوریکه بازای هر $x,y\in D(T)$ و هر $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

دامنهٔ $D(T)$ زیرفضای برداری X و برد T یعنی $R(T)$ نیز زیرفضای برداری Y است. معمولاً از نماد Tx بجای $T(x)$ استفاده می‌شود. روی فضای برداری X **عملگر همانی** بصورت $Tx = x$ **تعریف** شده و آنرا با I نشان می دهیم. عملگر $T : D(T) \to R(T)$ را **وارونپذیر** گوئیم اگر بعنوان یک نگاشت وارونپذیر باشد، یعنی یک به یک باشد. این به معنای آنست که عملگری مانند $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ موجود است چنانکه

$$T^{-1}Tx = Ix \ , \ x \in D(T)$$
$$TT^{-1}y = Iy \ , \ y \in R(T)$$

بجای آنکه بگوئیم T وارونپذیر است گوئیم T^{-1} موجود است. بوضوح عملگر T وارونپذیر است اگر و تنها اگر معادلهٔ $Tx = 0$ دارای جواب یکتای $x = 0$ باشد.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار و $T : D(T) \subset X \to Y$ یک عملگر خطی باشد. عملگر T را **کراندار** گوئیم هرگاه عدد حقیقی $c \geq 0$ موجود باشد به طوری که

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \quad , \quad \forall x \in D(T)$$

در اینصورت c را یک کران برای T خوانیم. باید توجه داشت در سمت چپ نامساوی فوق، نرم روی Y و در سمت راست، نرم روی X است. برای عملگر خطی کراندار T، **نرم** را چنین تعریف می کنیم:

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in D(T), x \neq 0\right\}$$

یا بطور معادل

$$\|T\| = \sup\left\{ \|Tx\| : x \in D(T), \|x\| = 1\right\}$$

برای عملگر همانی I، همواره $\|I\| = 1$. همچنین برای دو عملگر خطی کراندار S, T مشروط بر اینکه ضرب ST تعریف شده باشد داریم $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$. مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را با $\mathcal{L}(X,Y)$ و مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی و کراندار، از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را با $\mathcal{B}(X,Y)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که $\mathcal{L}(X,Y)$ و $\mathcal{B}(X,Y)$ همراه با جمع و ضرب اسکالر نقطه وار و نرم تعریف شده در فوق، فضای نرم دار می باشند و چنانچه Y باناخ باشد، آنگاه $\mathcal{L}(X,Y)$ و $\mathcal{B}(X,Y)$ نیز فضای باناخ خواهند بود. اگر $X = Y$ باشد، مجموعه‌های فوق را به ترتیب با $\mathcal{L}(X)$ و $\mathcal{B}(X)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۲.۳. اگر X و Y فضای ضرب داخلی باشند، عملگر $T : X \to Y$ را **یکریختی** نامیم، هرگاه خطی کراندار و وارونپذیر باشد. همچنین عملگر T را **طولپائی** نامیم اگر $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. مسلماً I طولپائی است و بعلاوه یکریختی $T : X \to Y$ نیز یک عملگر خطی دوسوئی است که ضرب را حفظ می کند، یعنی $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ لذا یکریختی T یک طولپائی روی X است.

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنید (T_n) یک دنباله از عملگرهای خطی کراندار روی فضای نرم دار X و T نیز یک عملگری خطی کراندار روی X باشد. آنگاه (T_n) را **همگرای قوی** به T گوییم هرگاه

$$\|T_n - T\| \to 0$$

وقتی که $n \to \infty$، و می‌نویسیم $T_n \to T$.

لم ۴.۲.۳. *فرض کنیم $T \in \mathcal{B}(X)$ که X یک فضای باناخ و نرم دار است. گیریم $\|T\| < ۱$ دراینصورت $(I-T)^{-۱}$ بعنوان یک عملگر خطی‌کراندار روی X موجود است بطوری که*

$$(I-T)^{-۱} = \sum_{j \geq ۰} T^j$$

برهان. چون $\|T\| < ۱$ و $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum_{j=۰}^{\infty} \|T^j\|$ همگراست، بنابراین سری $\sum_{j=۰}^{\infty} T^j$ همگرای مطلق است. چون $\mathcal{B}(X)$ کامل است همگرائی مطلق، همگرائی را نتیجه خواهد داد. فرض کنیم $S \in \mathcal{B}(X)$ و $S = \sum_{j=۰}^{\infty} T^j$ نشان می دهیم $S = (I-T)^{-۱}$. بوضوح خواهیم داشت:

$$(I-T)(I+T+T^۲+\cdots+T^n) = (I+T+T^۲+\cdots+T^n)(I-T) = I - T^{n+۱}$$

و وقتی $n \to \infty$ آنگاه $T^{n+۱} \to ۰$، که این نشان می دهد $(I-T)S = S(I-T) = I$ یعنی داریم $S = (I-T)^{-۱}$. □

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار باشند. عملگر خطی $T : X \to Y$ را **عملگر خطی فشرده** گوئیم، هرگاه برای هر مجموعهٔ کراندار $M \subseteq X$، تصویر $T(M)$ در Y فشردهٔ نسبی باشد (یعنی بستار $\overline{T(M)}$ در Y فشرده باشد).

قضیه ۶.۲.۳. *فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار و $T : X \to Y$ عملگر خطی باشد. آنگاه T فشرده است اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ کراندار (x_n) در X، دارای یک زیر دنباله (x_{n_k}) باشد که (Tx_{n_k}) در Y همگرا شود.*

برهان. فرض کنید T یک عملگر خطی فشرده و دنبالهٔ (x_n) در X کراندار باشد. مجموعهٔ کراندار M را بصورت

$$M = \{x_۱, x_۲, \cdots\}$$

در نظر می گیریم. چون T فشرده است پس $T(M)$ در Y فشرده نسبی در نتیجه $\overline{T(M)}$ در Y فشرده است. با توجه به فشردگی $\overline{T(M)}$ در Y، هر دنباله در $\overline{T(M)}$ از جمله دنباله $T(x_n)$ دارای زیر دنباله‌ای همگرا در $\overline{T(M)}$ به شکل (Tx_{n_k}) می‌باشد.

به عکس، فرض کنیم B یک زیرمجموعهٔ کراندار X باشد، ثابت می‌کنیم $T(B)$ در Y فشردهٔ نسبی است. گیریم $(y_n) = (Tx_n)$ دنباله‌ای در $T(B)$ باشد که در آن (x_n) دنباله‌ای در B است. چون B کراندار است پس (x_n) دارای یک زیردنبالهٔ (x_{n_k}) خواهد بود بطوری که (Tx_{n_k}) در Y همگرا می‌شود. اگر $y_{n_k} = Tx_{n_k}$ باشد، آنگاه دنباله (y_n) دارای زیردنباله y_{n_k} خواهد بود که در Y همگراست، لذا $T(B)$ فشرده نسبی است. □

قضیه ۷.۲.۳. *فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد،*
الف) اگر T کراندار و $\dim T(X) < \infty$ باشد، آنگاه T فشرده خواهد بود.
ب) اگر $\dim X < \infty$ باشد، آنگاه عملگر خطی T فشرده است.

برهان. (الف) گیریم (x_n) یک دنبالهٔ کراندار در X باشد. بنابه فرض T کراندار است پس

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\|$$

این نشان می دهد که دنبالهٔ (Tx_n) در Y کراندار است. مجموعهٔ D را بصورت $D = \{Tx_۱, Tx_۲, \cdots\}$ تعریف می کنیم. واضح است که D یک مجموعهٔ کراندار می باشد، پس $\overline{D}$ بسته و کراندار است. از طرفی طبق فرض $\dim T(X) < \infty$، لذا $T(X)$ بسته است و $D \subseteq T(X)$. در نتیجه

$$\overline{D} \subseteq \overline{T(X)} = T(X)$$

چون $\overline{T(X)}$ با بعد متناهی است یعنی $\overline{D}$ فشرده است. پس هر دنباله در $\overline{D}$ از جمله $\{Tx_۱, Tx_۲, \cdots\}$ دارای زیر دنبالهٔ همگراست و این فشردگی T را ثابت می کند.
(ب) چون $\dim(X) < \infty$ نتیجه می‌گیریم که T کراندار است. از قسمت (آ) استفاده کرده و فشردگی T اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۸.۲.۳. *گیریم X یک فضای نرم دار، $T : X \to X$ عملگرخطی فشرده و $S : X \to X$ یک عملگر خطی کراندار باشد. آنگاه TS و ST عملگرهای فشرده خواهند بود.*

برهان. فرض کنیم $B \subseteq X$ یک مجموعه کراندار باشد. چون S عملگر خطی کراندار است، پس $S(B)$ یک مجموعه کراندار خواهد بود. از طرفی T یک عملگر خطی فشرده است و در نتیجه $TS(B)$ یک مجموعهٔ فشرده نسبی می باشد، یعنی TS یک عملگر خطی فشرده می‌شود. برای اثبات فشردگی عملگر خطی ST، دنبالهٔ کراندار (x_n) در X را در نظر می‌گیریم. زیر دنبالهٔ (x_{n_k}) از (x_n) هست که دنبالهٔ (Tx_{n_k}) به نقطه‌ای از X مانند $x_۰$ همگراست. از اینرو خواهیم داشت

$$Tx_{n_k} \to x_۰ \Rightarrow ST(x_{n_k}) \to S(x_۰)$$

یعنی ST یک عملگر خطی فشرده است. $\square$

تعریف ۹.۲.۳. فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ فضاهای هیلبرت و $T : H_۱ \to H_۲$ نیز یک عملگر خطی کراندار باشد. عملگر $T^* : H_۲ \to H_۱$ را **عملگرالحاقی هیلبرت** T گوئیم، هرگاه برای هر $x \in H_۱$ و هر $y \in H_۲$،

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

برای عملگر خطی کراندار T، عملگر الحاقی هیلبرت T^* همواره وجود داشته، خطی و کراندار بوده و یکتاست و بعلاوه $\|T^*\| = \|T\|$.
اثبات وجود و یکتائی و ویژگیهای عملگر الحاقی در [۴] آمده است. مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی خودالحاق روی فضای هیلبرت را با $\mathcal{L}_R(H)$ نشان می دهیم، که یک فضای حقیقی خطی است. یعنی

$$\mathcal{L}_R(H) = \{T \in \mathcal{L}(H) | T = T^*\}$$

عملگر الحاقی هیلبرت برای ما اهمیت خاصی دارد و دارای خواص زیادی است که در بحثمان خواهیم آورد. از جمله اینکه اگر $S,T \in \mathcal{L}_R(H)$ با الحاقی های $S^*,T^* \in \mathcal{L}_R(H)$ سپس

$$(S+T)^* = S^* + T^* \quad , \quad (ST)^* = T^*S^*$$

حال نوع خاصی از عملگرها موسوم به عملگر یکانی را بصورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱۰.۲.۳. عملگر $U \in \mathcal{L}(H)$ را روی فضای هیلبرت H **یکانی** گوئیم هرگاه U دوسوئی بوده و $U^* = U^{-1}$.

عملگرهای یکانی از آنجا که پایه های متعامد یکه را به پایه های متعامد یکه می نگارند، مورد توجه هستند. اگر U عملگر یکانی باشد، U یکریختی و طولپائی خواهد بود زیرا

$$\langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, x\rangle \Rightarrow \|Ux\| = \|x\|$$

یعنی $\|U\| = ۱$. علاوه بر اینها حاصلضرب دو عملگر یکانی، یکانی است. عملگر $T \in \mathcal{L}(H)$ را **نرمال** گوئیم اگر $TT^* = T^*T$. بدیهی است که عملگر یکانی، نرمال نیز هست. این شرط را که یک عملگر، یکانی باشد را در زیر بیان می کنیم.

لم ۱۱.۲.۳. *عملگر خطی‌کراندار T روی فضای هیلبرت H یکانی است اگر و تنها اگر T ایزومتری و پوشا باشد.*

برهان. اگر T ایزومتری و پوشا باشد، لذا دوسوئی است و برای نشان دادن $T^* = T^{-1}$ می نویسیم

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle$$

که نتیجه می دهد $\langle (T^*T - I)x, x\rangle = ۰$ یعنی $T^*T = I$. از طرفی دیگر نیز داریم:

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = TIT^{-1} = I$$

یعنی T یکانی است. عکس آن نیز بدیهی است. □

تعریف ۱۲.۲.۳. اگر S و T عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت H باشند، عملگر T را **هم ارز یکانی** با عملگر S گوئیم، اگر عملگر یکانی U روی H چنان موجود باشد که

$$T = USU^{-1} = USU^*$$

بدیهی است که هرگاه S خودالحاق باشد، آنگاه T نیز خودالحاق است.

۳.۳ عملگر تصویر و فضای متعامد

تعریف ۱.۳.۳. زیرفضای Z از فضای هیلبرت H را **مکمل** زیرفضای $X \subset H$ نامیم، اگر X و Z اشتراک بدیهی داشته باشند و بعلاوه $H = X + Z$.

این تعریف بدین معناست که هر عنصر $h \in H$ را می توان بطور یکتا(زیرا اشتراک بدیهی است) بصورت $h = x + z$ تجزیه نمود که در آن $x \in X$ و $z \in Z$ است (این جمله را می توان بعنوان تعریف دیگری از زیرفضای مکمل نیز بکار برد، ولی در ادامهٔ بحث، ما وجود و یکتائی این تجزیه را از تعریف بالا ثابت خواهیم نمود). اگر X مکمل Z باشد، Z نیز مکمل X است و آنها را **زیرفضاهای مکمل** می نامیم. اگر X و Y زیرفضاهای فضای هیلبرت H باشند، Z را **مکمل مشترک** X و Y گوئیم هرگاه Z با X و Y اشتراک بدیهی داشته و نیز داشته باشیم

$$H = X + Z = Y + Z$$

تعریف ۲.۳.۳. در فضای باناخ H اگر Z مکمل X باشد، **تصویرکج** $\mathcal{P}_{X\|Z}$ برروی X موازی با Z را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{P}_{X\|Z}(x+z) = x \quad , x \in X \ , \ z \in Z$$

تعریف ۳.۳.۳. در فضای نرمدار X فاصله عنصر $x \in X$ از زیرمجموعهٔ ناتهی $\phi \neq S \subseteq X$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$dist(x, S) = \inf_{\hat{y} \in S} \|x - \hat{y}\|$$

طبق قضیهٔ زیر چنین عنصری تحت شرایطی موجود و یکتاست.

قضیه ۴.۳.۳. *اگر X یک فضای ضرب داخلی و $S \neq \phi$ زیرمجموعهٔ محدب و نیز کامل (تحت متریک القائی توسط حاصلضرب داخلی) باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ یک و تنها یک $y \in S$ هست که*

$$\delta = dist(x, S) = \inf_{\hat{y} \in S} \|x - \hat{y}\| = \|x - y\|$$

برهان. مطابق تعریف inf دنبالهٔ $\{y_n\}$ از اعضای S را چنان می توان یافت که $\delta_n = \|x - y_n\|$ و $\delta_n \to \delta$. نشان میدهیم که $\{y_n\}$ کوشی است. مینویسیم $y_n - x = v_n$ و لذا $\delta_n = \|v_n\|$ ازاینجا داریم:

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - ۲x\| = ۲\left\|\frac{۱}{۲}(y_n + y_m) - x\right\| \geq ۲\delta$$

چون S محدب است مطابق تساوی متوازی الاضلاع می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^۲ &= \|v_n - v_m\|^۲ \\
&= -\|v_n + v_m\|^۲ + ۲(\|v_n\|^۲ + \|v_m\|^۲) \\
&\leq -(۲\delta)^۲ + ۲(\delta_n^۲ + \delta_m^۲)
\end{aligned}$$

و چون $\delta_n \to \delta$ لذا $\{y_n\}$ کوشی خواهد بود. طبق کامل بودن S دنباله $\{y_n\}$ در S همگراست. گیریم $y_n \to y \in S$ پس $\|x - y\| \geq \delta$ در نتیجه

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta$$

یعنی $\|x - y\| = \delta$.

برای یکتائی S $y \in S$ فرض کنیم $y_1 \in S$ چنانست که $\|x-y\| = \|x-y_1\| = \delta$، آنگاه مطابق تساوی متوازی الاضلاع خواهیم داشت:

$$\|y-y_1\|^2 = \|(y-x)-(y_1-x)\|^2 = 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y+y_1)-x\right\|^2$$

اما بنا بفرض S محدب است پس $\frac{1}{2}(y+y_1) \in S$ و لذا $\left\|\frac{1}{2}(y-y_1)-x\right\| \geq \delta$ که با جایگذاری در تساوی قبل نتیجه می دهد که $\|y-y_1\| \leq 0$ یعنی $y = y_1$. □

چنین $y \in S$ منحصر بفردی که در رابطهٔ $\|x-y\| = \inf_{\hat{y}\in S}\|x-\hat{y}\|$ صدق می کند را تصویر بردار x روی S نامیم. اگر S زیرفضای بستهٔ فضای هیلبرت H باشد، این عنصر را با $\mathbf{P}_S x$ نشان می دهیم. نگاشت $\mathbf{P}_S : H \to S$ که $\mathbf{P}_S x \longmapsto x$ را **عملگر تصویری (یا تصویرمتعامد)** H بروی S می نامیم. بنابر آنچه در ذیل خواهیم آورد، $\mathbf{P}_S$ عملگری خطی و کراندار است و بعلاوه خود توان بوده (یعنی $\mathbf{P}_S^2 = \mathbf{P}_S$) و $\mathbf{P}_S|S$ عملگری همانی روی S است، یعنی اگر $x \in S$ آنگاه $\mathbf{P}_S x = x$.

لم ۵.۳.۳. *اگر S یک زیرفضای بستهٔ H باشد، آنگاه* $\forall x \in H \;:\; (x-\mathbf{P}_S x) \perp S$

برهان. از آنجا که S یک زیرفضاست و $\mathbf{P}_S x \in S$، آنگاه برای هر اسکالر α و هر بردار $y \in S$ داریم

$$\mathbf{P}_S x + \alpha y \in S$$

گیریم $\delta = \|x-\mathbf{P}_S x\|$ همان δی مذکور در قضیهٔ قبل باشد، طبق تعریف $\mathbf{P}_S x$ می نویسیم:

$$\delta^2 \leq \|x-(\mathbf{P}_S x+\alpha y)\|^2 = \|x-\mathbf{P}_S x\|^2 + |\alpha|^2\,\|y\|^2 - \overline{\alpha}\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle - \alpha\langle y, x-\mathbf{P}_S x\rangle$$

سپس

$$0 \leq |\alpha|^2\,\|y\|^2 - \overline{\alpha}\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle - \alpha\langle y, x-\mathbf{P}_S x\rangle \;\;,\;\; \forall\alpha$$

اکنون با فرض $\alpha = \beta\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle$ که β حقیقی است، خواهیم داشت:

$$0 \leq \beta^2|\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle|^2\,\|y\|^2 - 2\beta|\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle|^2$$

که نامساوی آخر برای هر β برقرار است لذا می بایست $|\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle|^2 = 0$ بنابراین $(x-\mathbf{P}_S x) \perp y$ و چون $y \in S$ دلخواه است بنابراین $(x-\mathbf{P}_S x) \perp S$. □

اکنون می توانیم هر عنصر $h \in H$ را به دو عنصر دیگر تجزیه کنیم. این مفهوم که قضیهٔ تجزیهٔ متعامد نام دارد در فضاهای $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ بطور معمول بکار رفته و هر عنصر را می توان به حاصلجمع مختصات جداگانه ای تجزیه کرد.

قضیه ۶.۳.۳. ***(قضیهٔ تجزیهٔ متعامد)*** *اگر S زیرفضای بستهٔ یک فضای هیلبرت H باشد. هر بردار $x \in H$ را می توان بطور یکتا بصورت مجموع $x = y + z$ که $y \in S$ و $z \perp S$ نمایش داد که در آن $y = \mathbf{P}_S x$ و $z = x - \mathbf{P}_S x$ خواهد بود.*

برهان. می نویسیم
$$x = \mathbf{P}_S x + (x - \mathbf{P}_S x)$$
که $\mathbf{P}_S x \in S$ بوده و بنابر لم قبل نیز $S \perp (x - \mathbf{P}_S x)$ است. اگر x دارای نمایش دیگری بصورت $x = y + z$ باشد که $y \in S$ و $z \perp S$، از دو تساوی بالا داریم $y + z = \mathbf{P}_S x + (x - \mathbf{P}_S x)$ که نتیجه می دهد
$$y - \mathbf{P}_S x = (x - \mathbf{P}_S x) - z \qquad (۱)$$
از طرفی چون $y - \mathbf{P}_S x \in S$ و $(x - \mathbf{P}_S x) - z \perp S$ بنابراین
$$y - \mathbf{P}_S x \perp (x - \mathbf{P}_S x) - z \qquad (۲)$$
از (۱) و (۲) و از آنجا که تنها برداری که بر خودش عمود است، بردار صفر است خواهیم داشت
$$y - \mathbf{P}_S x = (x - \mathbf{P}_S x) - z = ۰$$
و لذا $y = \mathbf{P}_S x$ و $z = x - \mathbf{P}_S x$ خواهد بود. □

نمایش بردار x بصورت $x = \mathbf{P}_S x + (x - \mathbf{P}_S x)$ را **تجزیهٔ متعامد** x **نسبت به** S نامیم. در قضیهٔ زیر خواصی از عملگر تصویری را ذکر می کنیم که در ادامهٔ بحث از آنها بهره فراوان خواهیم برد. اگر H فضای هیلبرت و $S \subset H$ باشد، تعریف می کنیم
$$S^{\perp} = \{y : y \perp x,\ \forall x \in S\}$$
گاهی هم می نویسیم $S^{\perp} = H \ominus S$. البته $H^{\perp} = \{۰\}$ و $\{۰\}^{\perp} = H$. قضیهٔ ۶.۳.۳ نشان دهندهٔ این است که اگر S یک زیرفضای بستهٔ H باشد، آنگاه $H = S + S^{\perp}$. بعلاوه تصویر H روی $S^{\perp}$ عبارتست از $I - \mathbf{P}_S$. قبل از بیان قضیهٔ زیر یادآوری می کنیم که فضای پوچ عملگر کراندار(پیوسته) $T : X \to Y$ عبارتست از مجموعهٔ
$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = ۰\}$$
و از پیوستگی T براحتی ثابت می شود که فضای پوچ بسته است.

قضیه ۷.۳.۳. *عملگر خطی کراندار $P : H \to H$ روی یک فضای هیلبرت H یک عملگر تصویری است اگر و تنها اگر P خودالحاق و خودتوان $(P^{۲} = P)$ باشد.*

برهان. (آ) فرض کنید P یک تصویر روی H است و $S = P(H)$ لذا $P^{۲} = P$ زیرا
$$\forall x \in H : Px = y \in S,\ P^{۲}x = P(Px) = Py = y = Px$$
بعلاوه اگر $x_۱ = y_۱ + z_۱ \in H$ و $x_۲ = y_۲ + z_۲ \in H$ که در آن $y_۱, y_۲ \in S$ و $z_۱, z_۲ \in S^{\perp}$ پس
$$< y_۱, z_۲ >=< z_۱, y_۲ >= ۰$$

زیرا $S \perp S^{\perp}$ و خودالحاقی P از زیر نتیجه می شود

$$\langle Px_۱, x_۲\rangle = \langle y_۱, y_۲ + z_۲\rangle = \langle y_۱, y_۲\rangle = \langle y_۱ + z_۱, y_۲\rangle = \langle x_۱, Px_۲\rangle$$

(ب) برعکس اگر P خودالحاق و خودتوان باشد یعنی $P^۲ = P = P^*$، آنگاه خواهیم داشت

$$\forall x \in H : x = Px + (I - P)x$$

عبارت

$$\langle Px, (I - P)v\rangle = \langle x, P(I - P)v\rangle = \langle x, Pv - P^۲v\rangle = \langle x, ۰\rangle = ۰$$

برای هر $x, v \in H$ ، تعامد $S = P(H) \perp (I - P)(H)$ را نتیجه می دهد.
همچنین داریم $S = \mathcal{N}(I - P)$ (که $\mathcal{N}$ فضای پوچ است) زیرا اگر $x \in \mathcal{N}(I - P)$ یعنی $Px = x$ پس $x \in S$ یعنی $\mathcal{N}(I - P) \subset S$، و از طرفی دیگر اگر $y \in S$ باشد، آنگاه xی هست که $Px = y$ و لذا

$$(I - P)y = (I - P)Px = (P - P^۲)x = ۰$$

یعنی $S \subset \mathcal{N}(I - P)$ و بنابراین $S = \mathcal{N}(I - P)$. چون فضای پوچ بسته است لذا S بسته است، بعلاوه $P |_S$ روی S همانی است زیرا اگر بنویسیم $y = Px$، داریم

$$Py = P^۲x = Px = y$$

واثبات تمام است. □

از مطالب گفته شده در قضایای قبل دربارۀ عملگر تصویر براحتی می توان خواص زیادی از این عملگر را بدست آورد، بخصوص اینکه اساس کار ما بر تعامد و عملگر تصویر قرار خواهد داشت. اکنون تحت قضیه ای در ذیل، خواصی چند از عملگر تصویر را ذکر می کنیم که اثبات آنها در خلال مطالب قبل ذکر شده است. خوانندۀ علاقمند می تواند برای مطالعۀ بیشتر دربارۀ عملگر تصویری به [۳] قضیۀ ۲,۳,۳ رجوع کند.

قضیه ۸.۳.۳. *اگر $\mathbf{P}_S$ عملگر تصویر در فضای هیلبرت H بر روی S باشد، آنگاه برای هر $x, y \in H$ داریم:*

آ) $\langle \mathbf{P}_S x, y\rangle = \langle \mathbf{P}_S x, \mathbf{P}_S y\rangle = \langle x, \mathbf{P}_S y\rangle$

ب) $\langle \mathbf{P}_S(\mathbf{P}_S x), y\rangle = \langle \mathbf{P}_S x, y\rangle$

پ) $\langle \mathbf{P}_S x, x\rangle = \|\mathbf{P}_S x\|^۲$

ت) $\|\mathbf{P}_S x\| \leq \|x\|$

ث) $\|x\|^۲ = \|x - \mathbf{P}_S x\|^۲ + \|\mathbf{P}_S x\|^۲$

ج) $S = \{x : \mathbf{P}_S x = x\} = \{x : \|\mathbf{P}_S x\| = \|x\|\}$

چ) $\mathbf{P}_S x = ۰ \Longleftrightarrow x \perp S$

ح) $\mathbf{P}_S(ax + by) = a\mathbf{P}_S x + b\mathbf{P}_S y$

خ) $\mathbf{P}_S H = S$

اکنون می خواهیم روی عملگرهای خودالحاق، ترتیب را تعریف کنیم. بنابراین فرض کنید که $T: H \to H$ عملگر خطی کراندار و خودالحاق روی فضای هیلبرت H باشد. از آنجا که

$$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle$$

لذا برای هر $x \in H$، مقدار $\langle Tx, x\rangle$ حقیقی است. مانند ترتیب روی اعداد حقیقی، ترتیب جزئی $\leq$ را می توان روی عملگرهای خودالحاق چنین تعریف نمود:

$$T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow \langle T_1x, x\rangle \leq \langle T_2x, x\rangle \quad , \quad \forall x \in H$$

که T_1 و T_2 عملگرهای خودالحاقند. بعلاوه $T_1 \geq T_2$ بدین معنی است که $T_1 \leq T_2$، همچنین

$$T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow T_1 - T_2 \leq 0$$

بهمین طریق عملگر خطی کراندار خودالحاق $T: H \to H$ را **مثبت** گوئیم هرگاه

$$T \geq 0 \Longleftrightarrow \langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad , \quad \forall x \in H$$

واضح است که اگر T عملگری مثبت باشد، الحاقی آن T^* نیز مثبت است. روی این مجموعه می توان جمع و ضرب را تعریف نمود. بوضوح جمع عملگرهای مثبت، مثبت است، برای ضرب عملگرهای مثبت، ذکر می کنیم که ضرب عملگرهای مثبت نیز مثبت است اگر که با هم جابجا شوند. گیریم:

$$\mathcal{L}_R^+(H) = \{T \in \mathcal{L}(H) | T = T^* \geq 0\}$$

توجه کنید که اگر $T \in \mathcal{L}_R(H)$ آنگاه

$$\langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\| \, \|x\| \leq \|T\| \, \|x\|^2 = \|T\| \, \langle Ix, x\rangle = \langle \|T\| \, Ix, x\rangle$$

و با تکرار این کار برای $-T$ نتیجه می گیریم که $-\|T\| \, I \leq T \leq \|T\| \, I$ لذا اگر $\mathbf{P}$ عملگر تصویر باشد نتیجه می گیریم $0 \leq \mathbf{P} \leq I$. مانند ریشه دوم اعداد حقیقی، برای هر عملگر مثبتی یک ریشهٔ دوم وجود دارد که در قضیهٔ زیر بیان می شود.

قضیه ۹.۳.۳. *اگر $A \in \mathcal{L}_R(H)$ و $A \geq 0$ آنگاه یک و تنها یک عملگر $B \in \mathcal{L}_R(H)$ وجود دارد چنانکه $A = B^2$. عملگر B با هر عملگری که با A جابجا شود، جابجا می‌شود.*

برهان. ر.ک.[۳] قضیهٔ ۴،۲،۳ و یا [۴] قضیهٔ ۴،۲-۹. □

قضیهٔ زیر که به *قضیهٔ تجزیهٔ قطبی* معروف است از قضایای کاربردی روی عملگرهای خودالحاق بشمار می رود و ساختاری شبیه تجزیهٔ قطبی اعداد مختلط بصورت $\zeta = re^{i\theta}$ دارد. این قضیه، با شرایط مختلف بیان شده و ما در اینجا تجزیهٔ قطبی یک یکریختی را بیان می کنیم. در اینجا قابل ذکر است که برای A و B در قضیهٔ ۹.۳.۳ گاهی می نویسیم $B = A^{\frac{1}{2}}$.

قضیه ۱۰.۳.۳. **(تجزیهٔ قطبی)** *فرض کنید $A: H_1 \to H_2$ یک یکریختی (عملگر کراندار وارونپذیر) بین دو فضای هیلبرت باشد و گیریم $R = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. آنگاه A دارای نمایش $A = UR$ است که در آن $U: H_1 \to H_2$ عملگری یکانی است.*

برهان. از آنجا که $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$ پس A^*A عملگری مثبت بوده و طبق قضیهٔ ۳٫۵-۳ دارای ریشه دوم مثبت است، گیریم $R = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ ریشهٔ دوم مثبت آن باشد، چون A وارونپذیر است می توان نوشت $V = RA^{-1}$ که $V : H_2 \to H_1$ که یک طولپائی است زیرا

$$V^*V = (RA^{-1})^*(RA^{-1}) = (A^{-1})^*R^*RA^{-1} = (A^{-1})^*A^*AA^{-1} = I$$

بنابراین گیریم $U = V^{-1}$، آنگاه $U^{-1} = RA^{-1}$ که نتیجه می دهد $A = UR$.
برای یکتائی فرض کنیم $UR = U_0R_0$. با گرفتن الحاقی از دو طرف خواهیم داشت $RU^* = R_0U_0^*$ لذا

$$R_0^2 = R_0U_0^*U_0R_0 = RU^*UR = R^2$$

چون ریشهٔ دوم عملگر یکتاست پس $R_0 = R$ و بنابراین $U_0 = U$. بعلاوه U طولپائی است زیرا

$$\forall h \in H_1 :\ \|U(Rh)\|^2 = \|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle = \langle A^*Ah, h\rangle = \langle R^2h, h\rangle = \langle Rh, Rh\rangle = \|Rh\|^2$$

و اثبات تمام است. □

۴.۳ همبعد در فضای هیلبرت

تعریف ۱.۴.۳. در فضای نرمدار X یک زیرمجموعهٔ $M \subset X$ را **مجموعهٔ کلی** گوئیم اگر $\overline{SpanM} = X$ باشد. مجموعهٔ کلی که متعامد یکه باشد را **متعامد یکهٔ کلی** گوئیم.
از مهمترین مفاهیم در بحث فضاهای برداری، مفهوم بعد است. بطور کلی فضای هیلبرت H بعنوان یک فضای برداری دارای یک **پایهٔ همل** است. در واقع در هر فضای هیلبرت $H \neq \{0\}$ یک مجموعهٔ متعامد یکهٔ کلی وجود دارد (ر.ک. [۴]). همهٔ مجموعه های متعامد یکهٔ کلی در فضای هیلبرت $H \neq \{0\}$ دارای یک عدد اصلی هستند. در واقع لویگ[1] و رلیچ[2] ثابت کردند که همهٔ پایه های متعامد یکه در فضای هیلبرت دارای یک عدد اصلی هستند (ر.ک.[۱] قضیهٔ IV.4.14). بنابراین مفهوم بعد در فضای هیلبرت ، مفهومی خوش تعریف است، عدد اصلی ذکر شده را **بعد فضای هیلبرت** نامیم و با $\dim H$ نشان می دهیم. در حالت $H = \{0\}$ تعریف می کنیم $\dim H = 0$. در حالتی که فضای هیلبرت دارای بعدی متناهی است این عدد، عددی طبیعی خواهد بود. در حالتی که فضای هیلبرت دارای بیش از یک بعد -با حداقل یک بعد نامتناهی- است، بیشینهٔ بعدها در نظر گرفته می شود. بعلاوه اگر دو فضای هیلبرت یکریخت باشند، دارای یک بعد خواهند بود. لذا بعد تحت یکریختی حفظ می شود.

تعریف ۲.۴.۳. **همبعد** زیرفضای X از فضای هیلبرت H را بصورت $\dim X^{\perp}$ تعریف می کنیم و آنرا با $codimX$ نشان می دهیم. همچنین اگر Y زیرفضای دیگری از H باشد تعریف می کنیم

$$codim_Y X = codim(Y \ominus X)$$

.

[1] Lowig
[2] Rellich

۵.۳ اندازهٔ نیم طیفی و اندازهٔ طیفی

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{B}_X)$ یک فضای اندازه پذیر باشد. آنگاه تابع $E : \mathcal{B}_X \to \mathcal{L}_R^+(H)$ را **اندازهٔ نیم طیفی** گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کند.

آ) $E(X) = I$

ب) برای هر $x \in H$، تابع $\mu_x(\sigma) = \langle E(\sigma)x, x\rangle$ (برای $\sigma \in \mathcal{B}_X$) یک اندازه روی $\mathcal{B}_X$ باشد.

مثال ۲.۵.۳. یک مثال بدیهی از اندازهٔ نیم طیفی را می توان بصورت $E(\sigma) = \mu(\sigma)I$ تعریف نمود، که I عملگر همانی و μ یک اندازهٔ دلخواه روی $\mathcal{B}_X$ است چنانکه $\mu(X) = ۱$. به عنوان یک حالت کلی، اگر $X \subseteq \sigma \subseteq \phi$ باشد که $\sigma \in \mathcal{B}_X$، آنگاه طبق لم ۳.۵.۲ داریم $۰ \leq \mu(\sigma) \leq \mu(X)$ لذا اگر E اندازهٔ نیم طیفی روی $\mathcal{B}_X$ باشد، خواهیم داشت:

$$\langle ۰x, x\rangle \leq \langle E(\sigma)x, x\rangle \leq \langle Ix, x\rangle$$

که نتیجه می دهد $\forall \sigma \in \mathcal{B}_X : \; ۰ \leq E(\sigma) \leq I$.

تعریف ۳.۵.۳. اندازهٔ نیم–طیفی E را یک **اندازهٔ طیفی** گوئیم، اگر برای $\sigma \in \mathcal{B}_X$، مقادیر $E(\sigma)$ی آن *عملگرهای تصویری* باشند.

اکنون برای بیان قضیهٔ مهمی با نام «قضیهٔ طیفی» مقدماتی را ذکر می‌کنیم.

تعریف ۴.۵.۳. اگر T عملگر کرانداری باشد، **طیف عملگر** T را چنین تعریف می کنیم:

$$\sigma_{(T)} = \{\lambda \in \mathbb{K} : (T - \lambda I)x = ۰, \exists x \neq ۰\}$$

و اگر برای $x \neq ۰$، $\lambda \in \mathbb{K}$ی موجود باشد که $(T - \lambda I)x = ۰$ یا $Tx = \lambda x$، این x را **بردار ویژهٔ** متناظر با λ گفته و $\lambda \in \sigma_{(T)}$ را **مقدار ویژهٔ** T گوئیم.

اگر T عملگر نرمال باشد و $۰ \leq T \leq I$ آنگاه برای بدست آوردن طیف T، اگر $x \neq ۰$ و $(T - \lambda I)x = ۰$، خواهیم داشت:

$$-\lambda I \leq T - \lambda I \leq (۱ - \lambda)I \quad \Rightarrow \quad -\lambda Ix \leq (T - \lambda I)x \leq (۱ - \lambda)Ix$$

از اینجا داریم $-\lambda x \leq ۰ \leq (۱ - \lambda)x$ یعنی $۰ \leq \lambda \leq ۱$ و بنابراین $\sigma_{(T)} \subseteq [۰, ۱]$.

برای تبدیلات ماتریسی براحتی می توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر را بدست آورد. در حالتی که عملگر T روی فضای هیلبرت متناهی – بعد تعریف شده باشد، تعداد بردارهای ویژه متناهی خواهد بود، زیرا تبدیل هم ارز با تبدیل ماتریسی «متناهی» خواهد شد. اکنون فرض کنید T تبدیلی نرمال روی فضای متناهی – بعد هیلبرت H باشد و $\{x_۱, \cdots, x_m\}$ بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز $\{\lambda_۱, \cdots, \lambda_m\}$ باشند، این بردارها بر هم عمودند زیرا

$$\lambda_i\langle x_i, x_j\rangle = \langle Tx_i, x_j\rangle = \langle x_i, Tx_j\rangle = \overline{\lambda_j}\langle x_i, x_j\rangle$$

لذا این m بردار متعامد، تشکیل پایه ای برای H داده و از آنجا، طبق مطالب گفته شده در بخش همبعد، $\dim H = m$ خواهد بود. اگر $x \in H$ بنابراین $x = \sum_{j=۱}^{m} \gamma_j x_j$ که $\gamma_j = \langle x, x_j\rangle$ و چون $Tx_j = \lambda_j x_j$

پس

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \lambda_j x_j \qquad (\dagger)$$

حال تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} E_j &: H \to H \\ x &\longmapsto \gamma_j x_j \end{aligned}$$

که بوضوح عملگر تصویر (متعامد) است، زیرا

$$\langle Ex, x\rangle = \langle \gamma_j x_j, x\rangle = \gamma_j \langle x_j, x\rangle = |\langle x_j, x\rangle|^2 = \langle x, Ex\rangle$$

و نیز $Ex = \gamma_j x_j = E(\gamma_j x_j) = E(Ex) = E^2 x$ ، که با جایگذاری در $(\dagger)$ نتیجه می شود: $Tx = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j E_j x$ یا

$$T = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j E_j \qquad (\dagger\dagger)$$

این عبارت با اهمیت، عملگر نرمال T را بر حسب مجموعی از عملگرهای تصویری، بیان می کند و با کمی تغییرات برای فضای هیلبرت نامتناهی - بعد نیز برقرار است. در حالت نامتناهی - بعد، مجموع بصورت حد مجموع در می آید که در قالب انتگرال ریمان - اشتیلیس بصورت

$$T = \int \lambda \, dE_\lambda \qquad (\dagger\dagger)$$

بیان می شود، که $\lambda \in \sigma_{(T)}$ و عملگرهای تصویری E_λ تحت شرایطی خاص تعیین می شوند. در واقع یک اندازهٔ طیفی $E(\cdot)$ برای عملگر نرمال T وجود دارد که E_λها از بین مقادیر آن انتخاب می شوند. این بیان که بصورت قضیهٔ بسیار مهمی در نظریهٔ عملگرها مطرح می شود، دارای جزئیات بسیاری است و از قضایای با اهمیت بشمار رفته و آنرا **قضیهٔ طیفی** نامند. قضیه چنین است:

قضیه ۵.۵.۳. (قضیهٔ طیفی) *فرض کنیم T عملگری نرمال و (Ω, B) جبر بورل روی صفحهٔ مختلط شامل $\sigma_{(T)}$ باشد، یک اندازهٔ طیفی $E(\cdot)$ بطور یکتا روی B چنان موجود است که*

$$T = \int_{\Omega} \lambda dE_\lambda$$

بعلاوه $E(\cdot)$ با هر عملگری که با T و T^* جابجا شود، جابجا خواهد شد.

این قضیهٔ مهم در کتب مختلف بطور مشروح ثابت شده که خواننده می تواند به [۵] قضیهٔ ۱,۲ و یا [۱] قضیهٔ X.2.1 و نتیجه های X.2.4 و X.2.6 و یا در [۳] بخش ۵,۶ مراجعه کند. قابل ذکر است که آنچه برای ما مهم است «وجود» این اندازهٔ طیفی برای عملگر نرمال T است که در فصل بعد از آن استفادهٔ فراوانی خواهیم برد. در انتهای این فصل لم زیر را به نقل از [۶] (قضیهٔ ۱۴ صفحهٔ ۳۷۰) بیان می کنیم.

لم ۶.۵.۳. *اگر S و T دو عملگر کراندار خودالحاق روی فضای نامتناهی-بعد هیلبرت H باشند، آنگاه S و T هم ارز یکانی هستند اگر و تنها اگر اندازهٔ طیفی آنها هم ارز یکانی باشد.*